Abstraktna algebra 2014/15

Boštjan Kuzman

1. oktober 2014

Vaja 1

1. Določi zaporedje redov in mrežo podgrup grupe $\mathbb{Z}_{56}$. Določi rede elementov 9, 12, 21 in 36.

2. Določi zaporedje redov grupe D_8. Nato določi vse podgrupe redov 2 in 4 in njihove razrede konjugiranosti. Katere podgrupe so edinke?

3. Določi zaporedje redov in mrežo podgrup grupe A_4.

4. Določi zaporedje redov grup $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_2)$ in $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}_2)$.

5. Naj bo $\mathbb{F}$ poljubno polje. Dokaži, da je množica

$$\mathrm{Aff}(\mathbb{F}) = \{f(x) = ax + b \mid a, b \in \mathbb{F}, a \neq 0\}$$

grupa za kompozitum. Poišči kakšno njeno (pravo, netrivialno) podgrupo edinko.

6. Določi zaporedje redov grupe $\mathrm{Aff}(\mathbb{Z}_3)$.

7. Kaj lahko poveš o zaporedju redov neskončnih grup $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}^*$, $\mathbb{C}^*$, $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$?

8. Naj bo $\phi\colon G \to G'$ homomorfizem grup in $a \in G$ poljuben element končnega reda. Dokaži, da red slike $\phi(a)$ deli red originala $a \in G$. Kaj pa velja, če je ϕ izomorfizem?

9. Velja ali ne velja? Utemelji.

(a) $H, K \leq G \implies H \cap K \leq G$ (presek podgrup je podgrupa).

(b) $H, K \leq G \implies H \cup K \leq G$ (unija podgrup je podgrupa).

(c) $H, K \leq G \implies HK \leq G$ (množica produktov podgrup je podgrupa).

(d) Če ima vsak element grupe red največ 2, je grupa abelska.

(e) V grupi sodega reda gotovo obstaja element reda 2.

(f) V grupi reda 12 gotovo obstaja element reda 6.

(g) Vsaka grupa reda 8 je komutativna.

(h) Jedro homomorfizma grup je podgrupa edinka začetne grupe.

(i) Če je G grupa, je množica elementov reda največ 2 njena podgrupa.

DN1.1. Naj bosta G in G' dve izomorfni grupi. Dokaži:

(a) G in G' imata enako moč.

(b) G je abelska natanko tedaj, ko je G' abelska.

(c) G in G' imata enako zaporedje redov.

DN1.2. Določi zaporedje redov grup D_{30}, $\mathbb{Z}_{60}$, A_5.

DN1.3. Ugotovi, ali sta grupi D_{20} in $\mathrm{Aff}(\mathbb{Z}_5)$ izomorfni?