Résolution numérique du problème inverse

April 4, 2016

1 Le problème direct

Voici le problème direct que nous allons être amenés à résoudre à chaque itération de notre algorithme:

$$\begin{cases} u_t - Lu = \tilde{c}.\chi^{-1}.u + g & (x,t) \in Q \\ u(x,0) = 0 & x \in \Omega \\ Bu = b(x,t) & (x,t) \in S \end{cases} \tag{1}$$

On utilise exactement les mêmes notations que dans Prilepko & Kostin.

2 Discrétisation et formulation variationnelle

On discrétise le problème en temps selon le schéma de Crank - Nicolson :

$$\frac{u^{i+1} - u^i}{\Delta t} = \frac{1}{2}.\left(Lu^{i+1} + \tilde{c}.\chi^{-1}.u^{i+1} + Lu^i + \tilde{c}.\chi^{-1}.u^i \right) + g \tag{2}$$

La formulation variationnelle est donc par exemple la suivante (pour L = Δ, conditions de Dirichlet aux bords):

$$a(u^{i+1}, v) = l(v) \tag{3}$$

Avec:

$$a(u^{i+1}, v) = \frac{1}{\Delta t} \int_\Omega u^{i+1}.v + \frac{1}{2} \int_\Omega \nabla u.\nabla v - \tilde{c}\chi^{-1} u^{i+1}.v \tag{4}$$

$$l(v) = \frac{1}{\Delta t} \int_\Omega u^i.v + \frac{1}{2} \int_\Omega (Lu^i + \tilde{c}.\chi^{-1}.u^i).v \tag{5}$$

3 L'algorithme

3.1 L'opérateur A

On rappelle la définition de l'opérateur A:

$$Ac = l(u_t(x,t,;c)) - L\chi - lg \tag{6}$$

3.2 Déroulement de l'algorithme

- On initialise les constante Δt, $\delta > 0$ et $T = n * \Delta t$, la variable $i = 0$ et les fonctions $u^0 = 0$, $c(x) < 0$ et $\chi(x) > 0$.
- Tant que $\| lu^n - \chi \|_\infty > \delta$: (on ignore la condition à la première itération)
  - Pour i de 0 à $n - 1$:
    - On calcule u^{i+1} par résolution du problème direct
  - $c \leftarrow Ac$ pour $u = u^n$
- On renvoie la dernière valeur de c.