XXX 课程
Homework X

Professor：*Pro.*

专业：**说唱专业**
学号：**114514**
学生：**A**

2022 年 8 月 18 日

Problem 1

简述 QCD 渐进自由性质及与其他几种相互作用力间的区别。
Solution
由重整化群方程可知，经重整化后 QCD 满足演化方程 ($DGLAP$) 如下

$$\frac{\partial f\left(x,\mu^2\right)}{\partial \ln\mu} = \frac{\alpha^2{}_s}{2\pi}\int_x^1 \frac{dz}{z}\sum_i f_{i/X}\left(\frac{x}{z},\mu^2\right)P_{ij}\left(z\right)$$

其中 μ 为能标，$f_{i/X}$ 为部分子 X 中动量 i 数量，$f\left(x,\mu^2\right)$ 为重整化后的场算符，于此处取 couppling constant 为研究对象，考虑 leading order 重整化得

$$Z_g = 1 - \frac{{g_0}^2}{16\pi^2}\left(\frac{11}{6}N_c - \frac{1}{3}N_f\right)\frac{1}{\epsilon},$$
$$\Rightarrow \beta(\mu^2) = \mu\frac{\partial g_0}{\partial\mu} = -\frac{{g_0}^3}{8\pi^2}\left(\frac{11}{6}N_c - \frac{1}{3}N_f\right).$$

不妨取研究能标为 $g(\mu_R^2)$，重整化能标为 $g(Q^2)$，($\mu_R^2 > Q^2$)，带入 β 函数可得

$$g\left(\mu^2{}_R\right) = \frac{g\left(Q^2\right)}{1+\frac{1}{8\pi^2}\left(\frac{11}{6}N_c - \frac{2}{3}N_f\right)\ln\frac{\mu^2{}_R}{Q^2}},$$

带入 $N_c = 3, N_f = 6$ 可得，在能标较高时耦合常数趋近于 0，即在较高能标下自由度较低，较低能标下可近似认为处于核内自由态，该性质为强相互作用力独有，引力及电弱相互作用不具备该特性。

Problem 2

试区分电子与质子在弹性散射及非弹性散射间定义的区别
Solution

1. 弹性散射 (ES)

   电子与质子发生弹性散射时末态产物为电子与质子，无其他强子生成，其动量转移 $Q^2 = (p' - p)^2$(p,p' 分别为电子初末态四动量) 较小。

2. 非弹性散射 (DS)

   电子与质子发生非弹性散射时末态产物为电子及强子，其动量转移 Q^2 较高。

Problem 3

试举例说明 QCD 色自由度为 3 的实验依据。
Solution 考虑正反电子对湮灭产生强子或一对正反轻子对的过程，定义

$$R = \frac{\sigma(e^+e^- \to hardons)}{\sigma(e^+e^- \to leptons)},$$

由渐进自由可知，在刚好能产生 u, d, s 夸克时满足

$$\begin{aligned} R &\simeq N_c[(\frac{2}{3})^2 + (-\frac{1}{3})^2 + (-\frac{1}{3})^2] \\ &= \frac{2}{3}N_c. \end{aligned}$$

实验测量值 $R \simeq 2$，进而可知色自由度为 3。

Problem 4

于 CM 系中试根据量子场论推导卢瑟福散射公式。
Solution
取重核电荷量为 Ze，质量为 $M >> m_e$ 做费曼图如图所示，

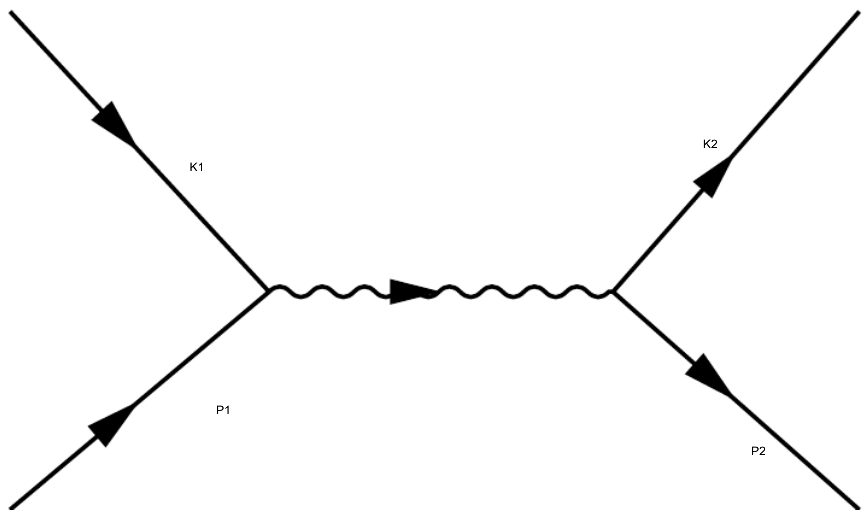

图 1: feynman diagram

可得

$$iM = \bar{u}(p_2)(-ie\gamma^\alpha)u(p_1)\frac{-ig_{\alpha\beta}}{q^2 + i\epsilon}\bar{u}(p_2)\left(-iZe\gamma^\beta\right)u(p_2),$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4}\sum_{spins}|M|^2 = \frac{8Z^2}{s^2}\left[p_2 \cdot k_2 p_1 \cdot k_1 + p_2 \cdot k_1 p_1 \cdot k_2 - M^2 p_1 \cdot p_2 - m^2{}_e k_1 \cdot k_2 + 2m^2{}_e M^2\right]$$

在 CM 系中有

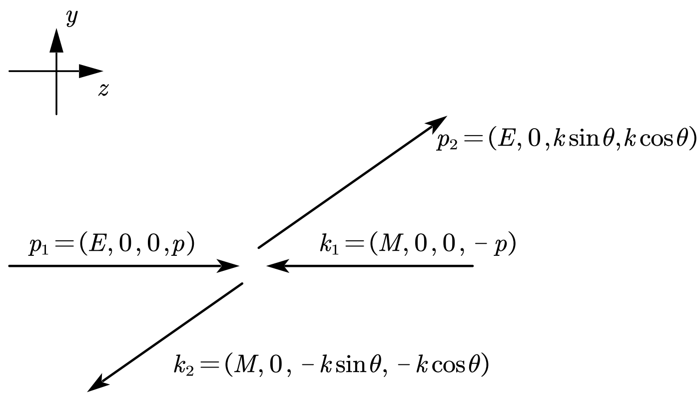

图 2: feynman diagram

进而可得

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{4}\sum_{spins}|M|^2 &\simeq \frac{Z^2e^4\left(1-|\vec{v}|^2\sin^2\frac{\theta}{2}\right)}{|\vec{p}|^2|\vec{v}|^2\sin^4\frac{\theta}{2}}M^2, \\
\Rightarrow \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{CM} &= \frac{1}{2E\cdot 2M|\vec{v}|}\frac{1}{4}\sum_{spins}|M|^2 \\
&= \frac{Z^2{\alpha^2}_s}{4|\vec{p}|^2|\vec{v}|^2\sin^4\frac{\theta}{2}}\left(1-|\vec{v}|^2\sin^2\frac{\theta}{2}\right).
\end{aligned}
$$