

1. La Sonda Solar Parker es una misión de la NASA cuyo objetivo es acercarse a la corona del Sol. Suponga que la sonda detecta que en un punto determinado del espacio, la temperatura en la dirección $(1, 1, 1)$ disminuye a razón de dos unidades, en la dirección $(1, 0, 1)$ aumenta a razón de una unidad y en la dirección $(0, -1, 1)$ disminuye en razón de una unidad. Si, además de esto, la sonda detecta que está en un lugar donde la temperatura puede afectar su funcionamiento y debe alejarse de tal manera que la temperatura disminuya a la mayor razón, ¿qué dirección debe seguir la sonda? (2.0pt)

Solución. Sean $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ la función que modela la temperatura y $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$ el punto donde se encuentra la sonda. Se conoce que

$$f'(\mathbf{a}; (1, 1, 1)) = -2, \quad f'(\mathbf{a}; (1, 0, 1)) = 1 \quad \text{y} \quad f'(\mathbf{a}; (0, -1, 1)) = -1.$$

Se busca la dirección de máximo decrecimiento de la función, la cual es contraria al gradiente, por lo tanto, debemos calcular $\nabla f(\mathbf{a})$. Sabemos que

$$f'(\mathbf{a}; (1, 1, 1)) = \nabla f(\mathbf{a}) \cdot (1, 1, 1), \quad f'(\mathbf{a}; (1, 0, 1)) = \nabla f(\mathbf{a}) \cdot (1, 0, 1)$$

t

$$f'(\mathbf{a}; (0, -1, 1)) = \nabla f(\mathbf{a}) \cdot (0, -1, 1),$$

por lo tanto

$$\nabla f(\mathbf{a}) \cdot (1, 1, 1) = -2, \quad \nabla f(\mathbf{a}) \cdot (1, 0, 1) = 1 \quad \text{y} \quad \nabla f(\mathbf{a}) \cdot (0, -1, 1) = -1$$

Si tomamos $\nabla f(\mathbf{a}) = (u, v, w)$, tenemos que

$$-2 = \nabla f(\mathbf{a}) \cdot (1, 1, 1) = (u, v, w) \cdot (1, 1, 1) = u + v + w,$$

$$1 = \nabla f(\mathbf{a}) \cdot (1, 0, 1) = (u, v, w) \cdot (1, 0, 1) = u + w$$

y

$$-1 = \nabla f(\mathbf{a}) \cdot (0, -1, 1) = (u, v, w) \cdot (0, -1, 1) = -v + w,$$

por lo tanto

$$u = 5 \quad v = -3 \quad \text{y} \quad w = -4.$$

Con esto, se tiene que

$$\nabla f(\mathbf{a}) = (5, -3, -4),$$

por lo tanto, la dirección que debe seguir la sonda es $(-5, 3, 4)$. □

2. a) Utilizando el Segundo Teorema Fundamental del Cálculo calcular $\int_0^2 x \cos(\pi x^2) dx$. (1.0pt)
 b) Utilizando el Primer Teorema Fundamental del Cálculo determinar la derivada de la función definida por $F(x) = \int_1^{x^2} \frac{\text{sen}(t)}{t} dt$, para $x > 0$. (1.0pt)

Solución.

a) Tomemos el cambio de variable

$$u = \pi x^2 \quad du = 2\pi x \, dx$$

con lo cual, tenemos

x	u
0	0
2	4π

Por lo tanto

$$\begin{aligned} \int_0^2 x \cos(\pi x^2) \, dx &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{4\pi} \cos(u) \, du \\ &= \frac{1}{2\pi} (\operatorname{sen}(u)) \Big|_0^{4\pi} \\ &= \frac{1}{2\pi} (\operatorname{sen}(4\pi) - \operatorname{sen}(0)) = 0. \end{aligned}$$

b) Dado que la función definida por

$$t \mapsto \frac{\operatorname{sen}(t)}{t}$$

es continua entre 1 y x^2 y la función $x \rightarrow x^2$ es derivable, se tiene que

$$F'(x) = \frac{d}{dx} \left(\int_0^{x^2} \frac{\operatorname{sen}(t)}{t} \, dt \right) = \frac{\operatorname{sen}(x^2)}{x^2} (x^2)' = \frac{\operatorname{sen}(x^2)}{x^2} (2x) = \frac{2 \operatorname{sen}(x^2)}{x}. \quad \square$$

3. La derivada de la función definida por $f(x) = x^2$ es

- a) $f'(x) = x^2$
- b) $f'(x) = x$
- c) $f'(x) = 2x$
- d) $f'(x) = 2x^2$

Solución. La opción correcta es la c). □

4. La derivada de la función definida por $f(x) = x^2$ es

- a) $f'(x) = x^2$
- b) $f'(x) = x$
- c) $f'(x) = 2x$
- d) $f'(x) = 2x^2$

Solución. La opción correcta es la c). □